ある種の統計量の事後分布の漸近展開について(漸近的統計理論)

早川, 毅

数理解析研究所講究録 1308 巻 2003 年 20-28

ある種の統計量の事後分布の漸近展開について

一橋大学・経済学研究科　早川　毅 (Takesi Hayakawa)
Graduate School of Economics, Hitotsubashi University

1. 序

観測値 X が与えられた時の母数 θ の事後分布の密度関数の漸近展開については多くの文献がある。Johnson (1967a, 1967b, 1970) は母数 θ が 1 次元の場合について考察している。Cox and Reid (1987) は母数 $\theta'=(\theta_1', \theta_2')$ が多次元の時、特に θ_1 が 1 次元で θ_2 が多次元の場合には parameter orthogonality を満たす母数を選択できることを示している。Ghosh and Mukerjee (1992) は θ_1 と θ_2 が 1 次元で parameter orthogonality を満たすもとで事後密度関数、尤度比規準、Cox-Reid の条件付尤度比規準の分布の漸近展開を与えている。DiCiccio and Stern (1993, 1994) は θ_1, θ_2 が多次元の場合について Ghosh and Mukerjee (1992) の結果を拡張している。また DiCiccio and Stern (1993) は単純仮説のもとでの Rao, Wald 統計量の漸近展開を考察している。本論文は θ_1, θ_2 が多次元である場合に各種検定統計量の分布について考察する。

2. 事後分布の密度関数

2.1 必要な記号

$X=[x_1, x_2, \cdots, x_n]$: 連続な密度関数 $f(x;\theta)$ を持つ母集団からの n 個の random sample,

$\pi(\theta)$: 母数 θ の事前密度関数,　$L(\theta)=\sum_{\alpha=1}^{n}\log f(x;\theta)$: 対数尤度関数,

$\hat\theta$: θ の最尤推定量,　$\hat Y=-\frac{1}{n}\left.\frac{\partial^2 L}{\partial\theta\partial\theta'}\right|_{\hat\theta}$　(確率 1 で正値定符号とする),

$$\hat Y_{\cdots}=\left(\frac{1}{n}\left.\frac{\partial^3 L}{\partial\theta_i\partial\theta_j\partial\theta_k}\right|_{\hat\theta}\right),\quad \hat Y_{\cdots\cdot}=\left(\frac{1}{n}\left.\frac{\partial^4 L}{\partial\theta_i\partial\theta_j\partial\theta_k\partial\theta_l}\right|_{\hat\theta}\right),$$

$$\hat\pi=\pi(\hat\theta),\quad \frac{\partial^k\hat\pi}{\partial\theta^k}=\left(\left.\frac{\partial^k\pi}{\partial\theta_{i_1}\cdots\partial\theta_{i_k}}\right|_{\hat\theta}\right),\quad k=1,2,3,$$

$h=\sqrt{n}(\theta-\hat\theta)$,　i.e.,　$\theta=\hat\theta+h/\sqrt{n}$ とする。

和の記号:

vector : $a=(a_1, a_2, \cdots, a_p)', b, c, \cdots$, etc.,

行列: $A=(a_{ij})_{p\times p}, B, C, \cdots$, etc.,

$$Y_{\dots} \circ a \circ b \circ c = \sum_{i,j,k} y_{ijk} a_i b_j c_k \cdots\cdots\cdots \text{ scalar},$$

$$Y_{\dots} \circ a \circ b = \left(\sum_{j,k} y_{ijk} a_j b_k \right) \cdots\cdots\cdots \text{ vector},$$

$$Y_{\dots} \circ a = \left(\sum_{k} y_{ijk} a_k \right) \cdots\cdots\cdots \text{ 行列},$$

$$Y_{\dots} \circ A \circ B (Y_{\dots} \circ C) = \sum y_{ijk} y_{pqr} a_{ij} b_{kp} c_{qr}, \quad Y_{\dots} * A * B * C * Y_{\dots} = \sum y_{ijk} y_{pqr} a_{ip} b_{jq} c_{kr},$$

$$Y_{\dots} (*A)^3 * Y_{\dots} = \sum y_{ijk} y_{pqr} a_{ip} a_{jq} a_{kr}, \quad Y_{\dots.} \circ A \circ B = \sum y_{ijkl} a_{ij} b_{kl}, \qquad \text{etc.}$$

2.2 事後分布の密度関数

観測値 X を与えたときの母数 θ の事後密度関数は、

$$\pi(h|X) = \pi(\hat{\theta} + h/\sqrt{n}) \exp\{L(\hat{\theta} + h/\sqrt{n}) - L(\hat{\theta})\}/N(X),$$
$$N(X) = \int \pi(\hat{\theta} + h/\sqrt{n}) \exp\{L(\hat{\theta} + h/\sqrt{n}) - L(\hat{\theta})\} dh$$

となる。各関数を $\hat{\theta}$ の周りで展開することにより、$\pi(h|X)$ の漸近展開式は次式で与えられる。

(1) $$\pi(h|X) = N_p(0, \hat{Y}^{-1}) \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} G_1 + \frac{1}{n} G_2 + o\left(\frac{1}{n}\right) \right\},$$

$$\begin{aligned}
G_1 &= \frac{1}{6} \hat{Y}_{\dots} (\circ h)^3 + \frac{1}{\hat{\pi}} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta'} h, \\
G_2 &= \frac{1}{24} \hat{Y}_{\dots.} (\circ h)^4 + \frac{1}{72} \{\hat{Y}_{\dots} (\circ h)^3\}^2 \\
&\quad + \frac{1}{6} \hat{Y}_{\dots} (\circ h)^3 \cdot \frac{1}{\hat{\pi}} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta'} h + \frac{1}{2} \frac{1}{\hat{\pi}} h' \frac{\partial^2 \hat{\pi}}{\partial \theta \partial \theta'} h - \frac{1}{8} \hat{Y}_{\dots.} (\circ \hat{Y})^2 \\
&\quad - \frac{1}{24} \{3 \hat{Y}_{\dots} \circ \hat{Y}^{-1} \circ \hat{Y}^{-1} (\hat{Y}_{\dots} \circ \hat{Y}) + 2 \hat{Y}_{\dots} (*\hat{Y}^{-1})^3 * \hat{Y}_{\dots}\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \hat{Y}_{\dots} \circ \hat{Y}^{-1} \circ \hat{Y}^{-1} \frac{1}{\hat{\pi}} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \frac{1}{\hat{\pi}} tr \frac{\partial^2 \hat{\pi}}{\partial \theta \partial \theta'} \hat{Y}^{-1}.
\end{aligned}$$

また、$\theta' = (\theta_1', \theta_2'), \theta_1' = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{p-q}), \theta_2' = (\theta_{p-q+1}, \cdots, \theta_p)$ とするとき、θ_1, すなわち $h_1' = (h_1, \cdots, h_{p-q})$ の周辺密度関数 $\pi(h_1|X)$ は次式で与えられる。

(2) $$\pi(h_1|X) = N_{p-q}(0, \hat{Y}_{11\cdot 2}^{-1}) \left\{ 1 + \frac{P_1}{\sqrt{n}} + \frac{P_2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right\}.$$

ここで、$\hat{Y}_{11\cdot 2}=\hat{Y}_{11}-\hat{Y}_{12}\hat{Y}_{22}^{-1}\hat{Y}_{21}$ である。

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{1}{6}\left\{\hat{Y}_{\cdots}(\circ\tilde{h})^3+3\hat{Y}_{\cdot 22}\circ\tilde{h}\circ\hat{Y}_{22}^{-1}\right\}+\frac{1}{\hat{\pi}}\frac{\partial\hat{\pi}}{\partial\theta'}\tilde{h},\\
P_2 &= \frac{1}{24}\left\{\hat{Y}_{\cdots\cdot}(\circ\tilde{h})^4+6\hat{Y}_{\cdot\cdot 22}(\circ\tilde{h})^2\circ\hat{Y}_{22}^{-1}+3\hat{Y}_{2222}(\circ\hat{Y}_{22}^{-1})^2\right\}\\
&\quad+\frac{1}{72}\left\{(\hat{Y}_{\cdots}(\circ\tilde{h})^3)^2+9\hat{Y}_{\cdot\cdot 2}(\circ\tilde{h})^2\circ\hat{Y}_{22}^{-1}(\hat{Y}_{2\cdot\cdot}(\circ\tilde{h})^2)\right.\\
&\qquad+6\hat{Y}_{\cdots}(\circ\tilde{h})^3\cdot\hat{Y}_{\cdot 22}\circ\tilde{h}\circ\hat{Y}_{22}^{-1}+18\hat{Y}_{\cdot 22}*\tilde{h}\tilde{h}'(*\hat{Y}_{22}^{-1})^2*\hat{Y}_{\cdot 22}\\
&\qquad+18\hat{Y}_{\cdot\cdot 2}(\circ\tilde{h})^2\circ\hat{Y}_{22}^{-1}(\hat{Y}_{222}\circ\hat{Y}_{22}^{-1})+9(\hat{Y}_{\cdot 22}\circ\tilde{h}\circ\hat{Y}_{22}^{-1})^2\\
&\qquad\left.+9\hat{Y}_{222}\circ\hat{Y}_{22}^{-1}\circ\hat{Y}_{22}^{-1}(\hat{Y}_{222}\circ\hat{Y}_{22}^{-1})+6\hat{Y}_{222}(*\hat{Y}_{22}^{-1})^3*\hat{Y}_{222}\right\}\\
&\quad+\frac{1}{6}\left\{\hat{Y}_{\cdots}(\circ\tilde{h})^3\cdot\frac{1}{\hat{\pi}}\frac{\partial\hat{\pi}}{\partial\theta'}\tilde{h}+3\hat{Y}_{\cdot 22}\circ\tilde{h}\circ\hat{Y}_{22}^{-1}\cdot\frac{1}{\hat{\pi}}\frac{\partial\hat{\pi}}{\partial\theta'}h\right.\\
&\qquad\left.+3\hat{Y}_{\cdot\cdot 2}(\circ\tilde{h})^2\circ\hat{Y}_{22}^{-1}\frac{1}{\hat{\pi}}\frac{\partial\hat{\pi}}{\partial\theta}+3\hat{Y}_{222}\circ\hat{Y}_{22}^{-1}\circ\hat{Y}_{22}^{-1}\frac{1}{\hat{\pi}}\frac{\partial\hat{\pi}}{\partial\theta}\right\}\\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\hat{\pi}}tr\frac{\partial^2\hat{\pi}}{\partial\theta\partial\theta'}\tilde{h}\tilde{h}'+\frac{1}{\hat{\pi}}tr\frac{\partial^2\hat{\pi}}{\partial\theta\partial\theta'}\hat{Y}_{22}^{-1}\right\}-\frac{1}{8}\hat{Y}_{\cdots\cdot}(\circ\hat{Y}^{-1})^2\\
&\quad-\frac{1}{24}\left\{3\hat{Y}_{\cdots}\circ\hat{Y}^{-1}\circ\hat{Y}^{-1}(\hat{Y}_{\cdots}\circ\hat{Y}^{-1})+2\hat{Y}_{\cdots}(*\hat{Y}^{-1})^3*\hat{Y}_{\cdots}\right\}\\
&\quad-\frac{1}{2}\frac{1}{\hat{\pi}}\hat{Y}_{\cdots}\circ\hat{Y}^{-1}\circ\hat{Y}^{-1}\frac{\partial\hat{\pi}}{\partial\theta}-\frac{1}{2}\frac{1}{\hat{\pi}}tr\frac{\partial^2\hat{\pi}}{\partial\theta\partial\theta'}\hat{Y}^{-1}.
\end{aligned}
$$

また、

$$
\tilde{h}=\begin{bmatrix} I_{p-q} \\ -\hat{Y}_{22}^{-1}\hat{Y}_{21}\end{bmatrix}h_1,\quad \hat{Y}=\begin{array}{cc} \begin{bmatrix}\hat{Y}_{11} & \hat{Y}_{12}\\ \hat{Y}_{21} & \hat{Y}_{22}\end{bmatrix} & \begin{matrix} p \\ q\end{matrix} \\ \begin{matrix} p \quad & \quad q\end{matrix} & \end{array}
$$

である。

3. 各種統計量の分布

3.1 尤度比規準

尤度比規準の事後分布の漸近展開については多くの文献がある (Bickel and Ghosh (1990), Ghosh and Mukerjee (1992), DiCiccio and Stern (1993, 1994), etc.)。

尤度比規準は、

$$
\lambda=2[L(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)-L(\theta_1,\tilde{\theta}_2(\theta_1))]
$$

で与えられ、$\tilde{\theta}_2(\theta_1)$ は θ_1 を固定した時の $L(\theta_1,\theta_2)$ を最大とするものであり次式を満たす。

$$
\frac{\partial L}{\partial\theta_2}(\theta_1,\tilde{\theta}_2(\theta_1))=0.
$$

上式を $\hat{\theta}$ において展開して、

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_2(\theta_1)-\hat{\theta}_2 &= -\frac{1}{\sqrt{n}}\hat{Y}_{22}^{-1}\hat{Y}_{21}h_1+\frac{1}{2n}\hat{Y}_{22}^{-1}[\hat{Y}_{2\cdot\cdot}(\circ\tilde{h})^2] \\ &\quad +\frac{1}{6n\sqrt{n}}\hat{Y}_{22}^{-1}\left\{\hat{Y}_{2\cdots}(\circ\tilde{h})^3+3\hat{Y}_{2\cdot 2}\circ\tilde{h}\circ\hat{Y}_{22}^{-1}(\hat{Y}_{2\cdot\cdot}(\circ\tilde{h})^2)\right\} \\ &\quad +o_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

これより尤度比規準 λ は次式として展開される。

$$\lambda=\tilde{h}'\hat{Y}\tilde{h}+\frac{1}{\sqrt{n}}\lambda_1+\frac{1}{n}\lambda_2+o_p\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{1}{3}\hat{Y}_{\cdots}(\circ\tilde{h})^3, \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{4}\hat{Y}_{\cdot\cdot 2}(\circ\tilde{h})^2\circ\hat{Y}_{22}^{-1}(\hat{Y}_{2\cdot\cdot}(\circ\tilde{h})^2)-\frac{1}{12}\hat{Y}_{\cdots\cdot}(\circ\tilde{h})^4.\end{aligned}$$

よって λ の積率母関数は次式となる。

$$\begin{aligned}(3)\qquad M_\lambda(t) &= E[\exp(t\lambda)] \\ &= (1-2t)^{-(p-q)/2}\left\{1+\frac{A}{n}\left(\frac{1}{(1-2t)}-1\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right\},\end{aligned}$$

$$A=A(\hat{Y}^{-1})-A(\hat{Z}),$$

$$\begin{aligned}A(\hat{Y}^{-1}) &= \frac{1}{24}\left\{3\hat{Y}_{\cdots}\circ\hat{Y}^{-1}\circ\hat{Y}^{-1}(\hat{Y}_{\cdots}\circ\hat{Y}^{-1})+2\hat{Y}_{\cdots}(*\hat{Y}^{-1})^3*\hat{Y}_{\cdots}\right\} \\ &\quad +\frac{1}{8}\hat{Y}_{\cdots\cdot}(\circ\hat{Y}^{-1})^2+\frac{1}{2}\frac{1}{\hat{\pi}}\hat{Y}_{\cdots}\circ\hat{Y}^{-1}\circ\hat{Y}^{-1}\frac{\partial\hat{\pi}}{\partial\theta} \\ &\quad +\frac{1}{2}\frac{1}{\hat{\pi}}tr\frac{\partial^2\hat{\pi}}{\partial\theta\partial\theta'}\hat{Y}^{-1},\end{aligned}$$

$$\hat{Z} = \begin{bmatrix} O & O \\ O & \hat{Y}_{22}^{-1}\end{bmatrix}.$$

これより尤度比規準の事後分布は Bartlett 補正可能である。

3.2 Rao 統計量

Bayes 対応の Rao 統計量は次式として定義される。

$$R=y(\theta_1,\tilde{\theta}_2(\theta_1))'Y(\theta_1,\tilde{\theta}_2(\theta_1))^{-1}y(\theta_1,\tilde{\theta}_2(\theta_1)).$$

Frequentist 対応の Rao 統計量は、

$$R^*=y(\theta_1,\tilde{\theta}_2(\theta_1))'K(\theta_1,\tilde{\theta}_2(\theta_1))^{-1}y(\theta_1,\tilde{\theta}_2(\theta_1))$$

$$K(\theta_1, \tilde{\theta}_2(\theta_1)) = E\left[\frac{\partial \log f}{\partial \theta}\frac{\partial \log f}{\partial \theta'}\right]\Bigg|_{(\theta_1, \tilde{\theta}_2(\theta_1))}$$

である。

Rの漸近展開は、

$$R = \tilde{h}'\hat{Y}\tilde{h} + R_1/n + o_p\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{4}\hat{Y}_{\cdot\cdot 2}(\circ\tilde{h})^2 \circ \hat{Y}_{22}^{-1}(\hat{Y}_{2\cdot\cdot}(\circ\tilde{h})^2) \\ &\quad + \frac{1}{4}\hat{Y}_{\dots}(\circ\tilde{h})^2 \circ \hat{Y}^{-1}(\hat{Y}_{\dots}(\circ\tilde{h}))^2 + \frac{1}{6}\hat{Y}_{\dots\cdot}(\circ\tilde{h})^4 \end{aligned}$$

となる。故にRの積率母関数は、

$$\begin{aligned} (4) \qquad M_R(t) &= E[\exp(tR)] \\ &= (1-2t)^{-(p-q)/2}\left\{1 + \frac{1}{n}\sum_{\alpha=0}^{3}\frac{a_\alpha}{(1-2t)^\alpha} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right\}, \\ a_3 &= \frac{1}{24}\left\{3\hat{Y}_{\dots} \circ \tilde{\Sigma} \circ \tilde{\Sigma}(\hat{Y}_{\dots} \circ \tilde{\Sigma}) + 2\hat{Y}_{\dots}(*\tilde{\Sigma})^3 * \hat{Y}_{\dots}\right\}, \\ a_2 &= \frac{1}{8}\left\{\hat{Y}_{\dots} \circ \tilde{\Sigma} \circ \hat{Y}^{-1}(\hat{Y}_{\dots} \circ \tilde{\Sigma}) + 2\hat{Y}_{\cdot\cdot 2} \circ \tilde{\Sigma} \circ \hat{Y}_{22}^{-1}(\hat{Y}_{2\cdot\cdot} \circ \tilde{\Sigma}) \right. \\ &\qquad \left. + 2\hat{Y}_{\dots} \circ \tilde{\Sigma} \circ \tilde{\Sigma}(\hat{Y}_{\cdot 22} \circ \hat{Y}_{22}^{-1})\right\} \\ &\quad + \frac{1}{4}\left\{\hat{Y}_{\dots}(*\tilde{\Sigma})^2 * \hat{Y}^{-1} * \hat{Y}_{\dots} + 2\hat{Y}_{\cdot\cdot 2}(*\tilde{\Sigma})^2 * \hat{Y}_{22}^{-1} * \hat{Y}_{\cdot\cdot 2}\right\} \\ &\quad + \frac{3}{8}\hat{Y}_{\dots\cdot}(\circ\tilde{\Sigma})^2 + \frac{1}{2}\hat{Y}_{\dots} \circ \tilde{\Sigma} \circ \tilde{\Sigma}\frac{1}{\hat{\pi}}\frac{\partial\hat{\pi}}{\partial\theta}, \\ a_1 &= \frac{1}{8}\left\{-\hat{Y}_{\dots} \circ \tilde{\Sigma} \circ \hat{Y}^{-1}(\hat{Y}_{\dots} \circ \tilde{\Sigma}) - \hat{Y}_{\cdot\cdot 2} \circ \tilde{\Sigma} \circ \hat{Y}_{22}^{-1}(\hat{Y}_{2\cdot\cdot} \circ \tilde{\Sigma}) \right. \\ &\qquad \left. + 2\hat{Y}_{\cdot\cdot 2} \circ \tilde{\Sigma} \circ \hat{Y}_{22}^{-1}(\hat{Y}_{222} \circ \hat{Y}_{22}^{-1}) + \hat{Y}_{22\cdot} \circ \hat{Y}_{22}^{-1} \circ \tilde{\Sigma}(\hat{Y}_{\cdot 22} \circ \hat{Y}_{22}^{-1})\right\} \\ &\quad + \frac{1}{4}\left\{-\hat{Y}_{\dots}(*\tilde{\Sigma})^2 * \hat{Y}^{-1} * \hat{Y}_{\dots} - \hat{Y}_{\cdot\cdot 2}(*\tilde{\Sigma})^2 * \hat{Y}_{22}^{-1} * \hat{Y}_{\cdot\cdot 2} \right. \\ &\qquad \left. + \hat{Y}_{\cdot 22} * \tilde{\Sigma}(*\hat{Y}_{22}^{-1})^2 * \hat{Y}_{\cdot 22}\right\} \\ &\quad + \frac{1}{2}\hat{Y}_{\cdot\cdot 2} \circ \tilde{\Sigma} \circ \hat{Y}_{22}^{-1}\frac{1}{\hat{\pi}}\frac{\partial\hat{\pi}}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\frac{1}{\hat{\pi}}tr\frac{\partial^2\hat{\pi}}{\partial\theta\partial\theta'}\tilde{\Sigma}, \\ a_0 &= -(a_1 + a_2 + a_3). \end{aligned}$$

ここで

$$\tilde{\Sigma} = \hat{Y}^{-1} - \hat{Z}^{-1}$$

DiCiccio and Stern (1993) は単純仮説問題に対する Rao 統計量として $R = y(\theta)'Y(\hat{\theta})^{-1}y(\theta)$ を用いて議論している。他にも $R = y(\theta)'Y(\theta)^{-1}y(\theta)$, $R = y(\hat{\theta})'Y(\theta)^{-1}y(\hat{\theta})$ 等も Rao 統計量として用いられる。

3.3 Wald 統計量

Bayes 対応の Wald 統計量は、

$$W = n(\hat{\theta}_1 - \theta_1)'Y_{11\cdot 2}(\theta_1, \tilde{\theta}_2(\theta_1))(\hat{\theta}_1 - \theta_1)$$

として定義される。Frequentist 対応の Wald 統計量は、

$$\begin{aligned} W^* &= n(\hat{\theta}_1 - \theta_1)'K_{11\cdot 2}(\hat{\theta})(\hat{\theta}_1 - \theta_1), \\ W^\circ &= n(\hat{\theta}_1 - \theta_1)'K_{11\cdot 2}(\theta_1, \tilde{\theta}_2(\theta_1))(\hat{\theta}_1 - \theta_1) \end{aligned}$$

等である。

W の漸近展開は、

$$W = \tilde{h}'\hat{Y}\tilde{h} + \frac{1}{\sqrt{n}}W_1 + \frac{1}{n}W_2 + o_p\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\begin{aligned} W_1 &= -\hat{Y}_{...}(\circ\tilde{h})^3, \\ W_2 &= -\frac{3}{2}\hat{Y}_{..2}(\circ\tilde{h})^2 \circ \hat{Y}_{22}^{-1}(\hat{Y}_{2..}(\circ\tilde{h})^2) - \frac{1}{2}\hat{Y}_{....}(\circ\tilde{h})^4 \end{aligned}$$

となる。W の積率母関数は、

$$\begin{aligned} (5) \qquad M_W(t) &= E[\exp(tW)] \\ &= (1-2t)^{-(p-q)/2}\left\{1 + \frac{1}{n}\sum_{\alpha=0}^{3}\frac{b_\alpha}{(1-2t)^\alpha} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right\} \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{1}{6}\left\{3\hat{Y}_{...} \circ \tilde{\Sigma} \circ \tilde{\Sigma}(\hat{Y}_{...} \circ \tilde{\Sigma}) + 2\hat{Y}_{...}(*\tilde{\Sigma})^3 * Y_{...}\right\}, \\ b_2 &= -\frac{1}{2}\left\{3\hat{Y}_{...} \circ \tilde{\Sigma} \circ \tilde{\Sigma}(\hat{Y}_{...} \circ \tilde{\Sigma}) + 2\hat{Y}_{...}(*\tilde{\Sigma})^3 * \hat{Y}_{...}\right\} \\ &\quad -\frac{5}{8}\left\{\hat{Y}_{..2} \circ \tilde{\Sigma} \circ \hat{Y}_{22}^{-1}(\hat{Y}_{2..} \circ \tilde{\Sigma}) + 2\hat{Y}_{..2}(*\tilde{\Sigma})^2 * \hat{Y}_{22}^{-1} * \hat{Y}_{..2}\right\} \\ &\quad -\frac{1}{2}\hat{Y}_{...} \circ \tilde{\Sigma} \circ \tilde{\Sigma}(\hat{Y}_{\cdot 22} \circ \hat{Y}_{22}^{-1}) - \frac{5}{8}\hat{Y}_{....}(\circ\tilde{\Sigma})^2 \\ &\quad -\hat{Y}_{...} \circ \tilde{\Sigma} \circ \tilde{\Sigma}\frac{1}{\tilde{\pi}}\frac{\partial\tilde{\pi}}{\partial\theta}, \\ b_1 &= \frac{1}{8}\left\{9\hat{Y}_{...} \circ \tilde{\Sigma} \circ \tilde{\Sigma}(\hat{Y}_{...} \circ \tilde{\Sigma}) + 6\hat{Y}_{...}(*\tilde{\Sigma})^3 * \hat{Y}_{...}\right\} \\ &\quad +\frac{3}{4}\left\{\hat{Y}_{..2} \circ \tilde{\Sigma} \circ \hat{Y}_{22}^{-1}(\hat{Y}_{2..} \circ \tilde{\Sigma}) + 2\hat{Y}_{..2}(*\tilde{\Sigma})^2 * \hat{Y}_{22}^{-1} * \hat{Y}_{..2}\right\} \\ &\quad +\frac{3}{4}\hat{Y}_{...} \circ \tilde{\Sigma} \circ \tilde{\Sigma}(\hat{Y}_{\cdot 22} \circ \hat{Y}_{22}^{-1}) + \frac{1}{4}\hat{Y}_{..2} \circ \tilde{\Sigma} \circ \hat{Y}_{22}^{-1}(\hat{Y}_{222} \circ \hat{Y}_{22}^{-1}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{1}{8}\hat{Y}_{22\cdot}\circ\hat{Y}_{22}^{-1}\circ\tilde{\Sigma}(\hat{Y}_{\cdot 22}\circ\hat{Y}_{22}^{-1})+\frac{1}{4}\hat{Y}_{\cdot 22}*\tilde{\Sigma}(*\hat{Y}_{22}^{-1})^2*\hat{Y}_{\cdot 22} \\
& +\frac{1}{4}\hat{Y}_{\cdots\cdot}(\circ\tilde{\Sigma})^2+\frac{3}{2}\hat{Y}_{\cdots}\circ\tilde{\Sigma}\circ\tilde{\Sigma}\frac{1}{\hat{\pi}}\frac{\partial\hat{\pi}}{\partial\theta} \\
& +\frac{1}{2}\hat{Y}_{22\cdot}\circ\hat{Y}_{22}^{-1}\circ\tilde{\Sigma}\frac{1}{\hat{\pi}}\frac{\partial\hat{\pi}}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\hat{Y}_{\cdot\cdot 2}\circ\tilde{\Sigma}\circ\hat{Y}_{22}^{-1}\frac{1}{\hat{\pi}}\frac{\partial\hat{\pi}}{\partial\theta} \\
& +\frac{1}{2}\frac{1}{\hat{\pi}}tr\frac{\partial^2\hat{\pi}}{\partial\theta\partial\theta'}\tilde{\Sigma}, \\
b_0 \;=\; & -(b_1+b_2+b_3).
\end{aligned}
$$

DiCiccio and Stern (1993) は単純仮説問題に対する Wald 統計量 $W=n(\hat{\theta}-\theta)'Y(\hat{\theta})(\hat{\theta}-\theta)=h'\hat{Y}h$ を取り扱っている。

複合仮説問題において、

$$W^*=n(\hat{\theta}_1-\theta_1)'Y_{11\cdot 2}(\hat{\theta})(\hat{\theta}_1-\theta_1)$$

とする（これが original な Bayes 対応の Wald 統計量である）とすれば、

$$W^*=\tilde{h}\hat{Y}\tilde{h}$$

である。

3.4 平方根尤度比規準

母数が 1 次元であるとき平方根尤度比規準は、

$$\sqrt{\lambda}=sqn(\hat{\theta}-\theta)[2\{L(\hat{\theta})-L(\theta)\}]^{1/2}$$

として定義される。

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\lambda} \;=\; & -\sqrt{\hat{y}_{(2)}}\,h+\frac{1}{6\sqrt{n}}\frac{\hat{y}_{(3)}}{(\hat{y}_{(2)})^{1/2}}h^2 \\
& +\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{24}\frac{\hat{y}_{(4)}}{(\hat{y}_{(2)})^{1/2}}h^3+\frac{1}{72}\frac{(\hat{y}_{(3)})^2}{(\hat{y}_{(2)})^{3/2}}h^3\right\}+o_p\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}
$$

ここで、

$$\hat{y}_{(2)}=-\frac{1}{n}\frac{\partial^2 L}{\partial\theta^2}\bigg|_{\hat{\theta}},\quad \hat{y}_{(3)}=\frac{1}{n}\frac{\partial^3 L}{\partial\theta^3}\bigg|_{\hat{\theta}},\quad \hat{y}_{(4)}=\frac{1}{n}\frac{\partial^4 L}{\partial\theta^4}\bigg|_{\hat{\theta}}$$

である。よって、$\sqrt{\lambda}$ の密度関数は次式で与えられる。

$$
\begin{aligned}
(6)\qquad f_{\sqrt{\lambda}}(x) \;=\; & \phi(x)\left[1+\frac{\bar{a}_1}{\sqrt{n}}+\frac{\bar{a}_2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right], \\
\bar{a}_1 \;=\; & -H_1(x)\left\{\frac{1}{3}\frac{\hat{y}_{(3)}}{(\hat{y}_{(2)})^{3/2}}+\frac{1}{\hat{\pi}}\frac{\partial\hat{\pi}}{\partial\theta}\frac{1}{\hat{y}_{(2)}}\right\}, \\
\bar{a}_2 \;=\; & H_2(x)\left\{\frac{5}{24}\frac{(\hat{y}_{(3)})^2}{(\hat{y}_{(2)})^3}+\frac{1}{8}\frac{\hat{y}_{(4)}}{(\hat{y}_{(2)})^2}+\frac{1}{2}\frac{\hat{y}_{(3)}}{(\hat{y}_{(2)})^2}\frac{1}{\hat{\pi}}\frac{\partial\hat{\pi}}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\frac{1}{\hat{y}_{(2)}}\frac{1}{\hat{\pi}}\frac{\partial\hat{\pi}}{\partial\theta}\right\}.
\end{aligned}
$$

ここで $\phi(x)$ は $N(0,1)$ の密度関数であり、$H_k(x)$ は k 次の Hermite 多項式である。特に $x=0$ における近似誤差の order は $O(n^{-1})$ である。

3.5 平方根 Rao 統計量

平方根 Rao 統計量を

$$\sqrt{R} = y(\theta)/\sqrt{y_{(2)}(\theta)}$$

として定義すると、漸近展開式は、

$$\sqrt{R} = -\sqrt{\hat{y}_{(2)}}\,h - \frac{h^3}{n}\left\{\frac{1}{8}\frac{(\hat{y}_{(3)})^2}{(\hat{y}_{(2)})^{3/2}} + \frac{1}{12}\frac{\hat{y}_{(4)}}{(\hat{y}_{(2)})^{1/2}}\right\} + o_p\left(\frac{1}{n}\right)$$

となる。$\sqrt{R}$ の密度関数は、

$$\begin{aligned}
(7) \qquad f_{\sqrt{R}}(x) &= \phi(x)\left[1 + \frac{\bar{b}_1}{\sqrt{n}} + \frac{\bar{b}_2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right],\\
\bar{b}_1 &= -\left\{\frac{1}{6}\frac{\hat{y}_{(3)}}{(\hat{y}_{(2)})^{3/2}}H_3(x) + \left(\frac{1}{2}\frac{\hat{y}_{(3)}}{(\hat{y}_{(2)})^{3/2}} + \frac{1}{\hat{\pi}}\frac{\partial\hat{\pi}}{\partial\theta}\frac{1}{\hat{y}_{(2)}}\right)H_1(x)\right\},\\
\bar{b}_2 &= \frac{1}{72}\frac{(\hat{y}_{(3)})^2}{(\hat{y}_{(2)})^3}H_6(x) + \left\{\frac{1}{3}\frac{(\hat{y}_{(3)})^2}{(\hat{y}_{(2)})^3} + \frac{1}{8}\frac{\hat{y}_{(4)}}{(\hat{y}_{(2)})^2} + \frac{1}{6}\frac{\hat{y}_{(3)}}{(\hat{y}_{(2)})^2}\frac{1}{\hat{\pi}}\frac{\partial\hat{\pi}}{\partial\theta}\right\}H_4(x)\\
&\quad + \left\{\frac{(\hat{y}_{(3)})^2}{(\hat{y}_{(2)})^3} + \frac{1}{2}\frac{\hat{y}_{(4)}}{(\hat{y}_{(2)})^2} + \frac{\hat{y}_{(3)}}{(\hat{y}_{(2)})^2}\frac{1}{\hat{\pi}}\frac{\partial\hat{\pi}}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\frac{1}{\hat{y}_{(2)}}\frac{1}{\hat{\pi}}\frac{\partial\hat{\pi}}{\partial\theta}\right\}H_2(x)
\end{aligned}$$

となる。

3.6 平方根 Wald 統計量

平方根 Wald 統計量は、

$$\sqrt{W} = \sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta)\sqrt{y_{(2)}(\theta)}$$

として定義され、次のような漸近展開、漸近分布を持つ。

$$\begin{aligned}
\sqrt{W} &= -\sqrt{\hat{y}_{(2)}}h + \frac{1}{2\sqrt{n}}\left\{\frac{\hat{y}_{(3)}}{(\hat{y}_{(2)})^{1/2}}h^2\right\}\\
&\quad + \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{4}\frac{\hat{y}_{(4)}}{(\hat{y}_{(2)})^{1/2}} + \frac{1}{8}\frac{(\hat{y}_{(3)})^2}{(\hat{y}_{(2)})^{3/2}}\right\}h^3 + o_p\left(\frac{1}{n}\right),\\
(8) \qquad f_{\sqrt{W}} &= \phi(x)\left[1 + \frac{\bar{c}_1}{\sqrt{n}} + \frac{\bar{c}_2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right],\\
\bar{c}_1 &= \frac{1}{3}\frac{\hat{y}_{(3)}}{(\hat{y}_{(2)})^{3/2}}H_3(x) - \frac{1}{\hat{\pi}}\frac{\partial\hat{\pi}}{\partial\theta}\frac{1}{(\hat{y}_{(2)})^{1/2}}H_1(x),\\
\bar{c}_2 &= \frac{1}{18}\frac{(\hat{y}_{(3)})^2}{(\hat{y}_{(2)})^3}H_6(x) + \left\{-\frac{5}{24}\frac{\hat{y}_{(4)}}{(\hat{y}_{(2)})^2} - \frac{1}{3}\frac{\hat{y}_{(3)}}{(\hat{y}_{(2)})^2}\frac{1}{\hat{\pi}}\frac{\partial\hat{\pi}}{\partial\theta}\right\}H_4(x)\\
&\quad + \left\{-\frac{5}{8}\frac{(\hat{y}_{(3)})^2}{(\hat{y}_{(2)})^3} - \frac{1}{2}\frac{\hat{y}_{(4)}}{(\hat{y}_{(2)})^2} - \frac{1}{2}\frac{\hat{y}_{(3)}}{(\hat{y}_{(2)})^2}\frac{1}{\hat{\pi}}\frac{\partial\hat{\pi}}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\frac{1}{\hat{\pi}}\frac{\partial\hat{\pi}}{\partial\theta}\cdot\frac{1}{\hat{y}_{(2)}}\right\}H_2(x).
\end{aligned}$$

References

[1] Bickel, P.J. and Ghosh, J.K. (1990). A decomposition for the likelihood ratio statistic and the Bartlett correction – A Bayesian argument, *Ann. Statist.*, **18**, 1070-1090.

[2] Cox, D.R. and Reid, N. (1987). Parameter orthogonality and approximate conditional inference (with discussion), *J. R. Statist. Soc.*, **B49**, 1-39.

[3] DiCiccio, T.J. and Stern, S.E. (1993). On Bayesian adjustments for approximate Bayesian inference, *Biometrika*, **80**, 731-740.

[4] DiCiccio, T.J. and Stern, S.E. (1994). Frequentist and Bayesian Bartlett correction of test statistics based on adjusted profile likelihoods, *J. R. Statist. Soc.*, **B56**, 397-408.

[5] Ghosh, J.K. and Mukerjee, R. (1992). Bayesian and frequentist Bartlett corrections for likelihood ratio and conditional likelihood ratio tests, *J. R. Statist. Soc.*, **B54**, 867-875.

[6] Johnson, R.A. (1967a). An asymptotic expansion for posterior distribution, *Ann. Math. Statist.*, **38**, 1899-1906.

[7] Johnson, R.A. (1967b). Asymptotic expansions associated with the nth power of a density, *Ann. Math. Statist.*, **38**, 1266-1272.

[8] Johnson, R.A. (1970). Asymptotic expansions associated with posterior distribution, *Ann. Math. Statist.*, **41**, 851-864.